

第4章 正弦稳态交流电路（复习）

• 知识点1: 正弦电压和电流的相量表示

在正弦稳态电路中，如激励为同频正弦量，则各电压、电流都是与激励同频率的正弦量。

所以在同频条件下，只需要两个要素就可以确定各个正弦量。

如 $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi)$

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = U_m \angle \psi$$

最大值相量

正弦量幅值

正弦量初相

或 $\dot{U} = U \angle \psi$

$$\dot{U}_m = \sqrt{2} \dot{U}$$

注：仅对应（代表）正弦量的复数称为相量，并不是所有的复数都可称为相量，为以示区别相量标识顶部加点。

注意：

①相量只是对应正弦量，而不等于正弦量。

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi) \neq I_m e^{j\psi} = I_m \angle \psi$$

②只有对应正弦电压电流的复数才称为相量，并非所有复数都是相量，为以示区别相量标识顶部加点。

③应用相量分析电路只能计算正弦电压及电流的幅值（或有效值）和初相。因而相量分析只适用于同频正弦电路（频率已知），即电路中的电压和电流都是同频正弦量。把对应不同频率正弦量的相量相加减无意义。

正误判断

1. 已知：

$$u = 220 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{V}$$

$$\dot{U} \neq \frac{220}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \text{V}$$

有效值

$\angle 45^\circ$

$$\dot{U}_m \neq 220 e^{j45^\circ} \text{V}$$

2. 已知： $\dot{I} = 10 \angle 60^\circ \text{A}$

$$i \neq 10 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{A}$$

最大值 $10\sqrt{2}$

cos

3. 已知：

$$\dot{I} = 4 e^{j30^\circ} \text{A}$$

复数

$$\neq 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ) \text{A}$$

瞬时值

4. 已知：

$$\dot{U} = 100 \angle -15^\circ \text{V}$$

$$U \neq 100 \text{V}$$

负号

$$\dot{U} \neq 100 e^{j15^\circ} \text{V}$$

• 知识点2: 基尔霍夫定律的相量形式

(1) 基尔霍夫电流定律方程的相量形式

在集中参数电路中，任一时刻流出（或流入）任一节点的电流代数和等于零。其时域表示为

$$\sum i = 0$$

当方程中各电流均为同频率的正弦量时，它们对应的相量满足基尔霍夫电流定律方程的相量形式。

$$\sum \dot{I}_m = 0 \quad \text{或} \quad \sum \dot{I} = 0$$

最大值相量

有效值相量

$$\text{但} \quad \sum I = 0$$

(2) 基尔霍夫电压定律方程的相量形式

在集中参数电路中，任一时刻沿任一回路各支路电压的代数和等于零。

基尔霍夫电压定律方程的时域形式为

$$\sum u = 0$$

当方程中各电压均为同频率的正弦量时，它们对应的相量满足，基尔霍夫电压定律方程的相量形式为：

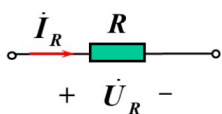
$$\sum \dot{U}_m = 0 \quad \text{或} \quad \sum \dot{U} = 0$$

$$\text{但} \quad \sum U = 0$$

• 知识点3：欧姆定律的相量形式

知识点3.1：RLC元件欧姆定律的相量形式

(1) 电阻元件



相量模型
(关联参考方向)

电阻元件的复数阻抗
(虚部为零), 简称
复阻抗

$$\dot{U}_R = R \dot{I}_R$$

电阻元件
欧姆定律的相量形式

$$Z_R = \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = R = R \angle \varphi_R$$

$$|Z_R| = R$$

电阻元件复阻抗
的模, 称阻抗模或阻抗

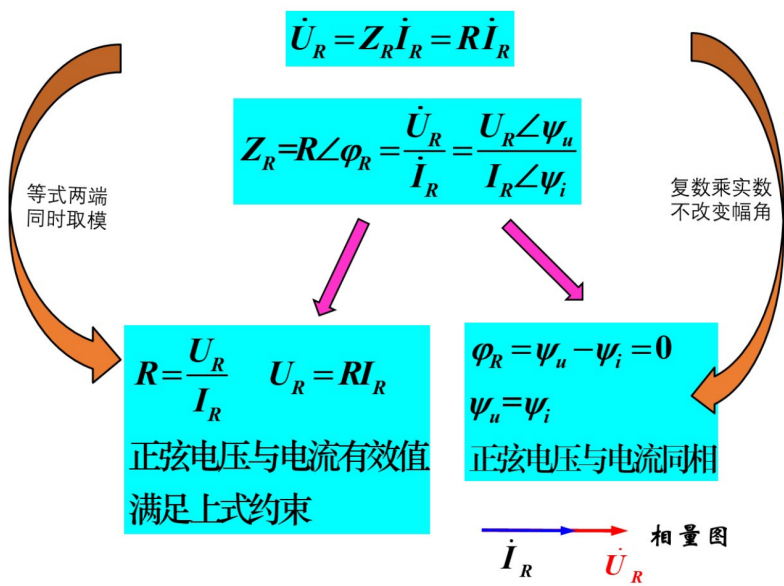
$$\varphi_R = 0$$

电阻元件复阻抗
的阻抗角

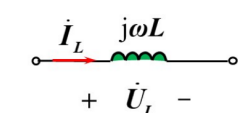
引入复数阻抗（复阻抗）的意义和目的？

1、数学意义：复阻抗是一个辅助计算量，将电压相量和电流相量的数量计算关系联系在一起。例如 $\dot{U}_R = Z_R \dot{I}_R$

2、物理意义：阻抗模反映复阻抗对流过它的电流的阻碍，阻抗角反映其两端电压与流过它的电流之间的相位关系，即相位差。通过相位差可判断电压与电流之间超前或落后的关系。



(2) 电感元件



相量模型
(关联参考方向)

$$Z_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$$

电感元件的复阻抗
(实部为零)。

$$|Z_L| = \omega L = X_L$$

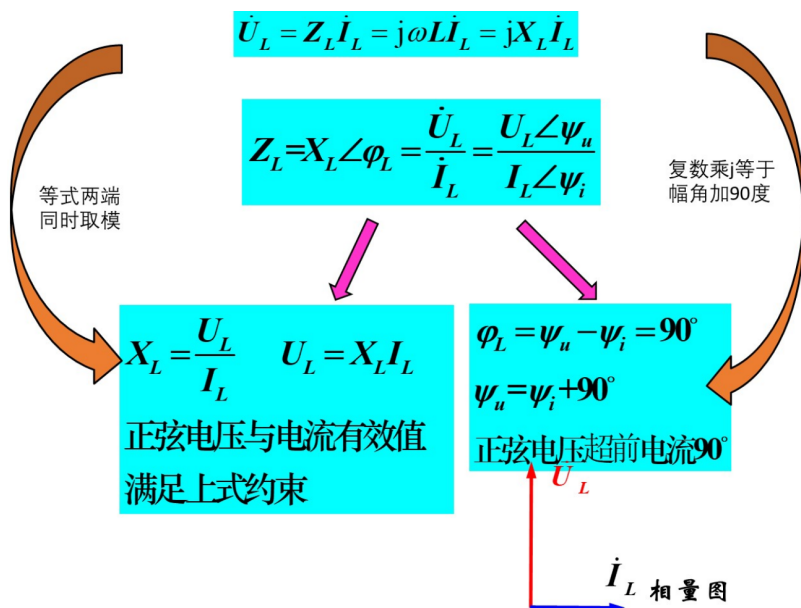
电感元件阻抗模，
称感抗

$$\phi_L = 90^\circ$$

电感元件复阻抗
的阻抗角

电感元件
欧姆定律的相量形式

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L$$



定义: $X_L = U/I = \omega L = 2\pi fL$, 单位: 欧姆

错误的写法

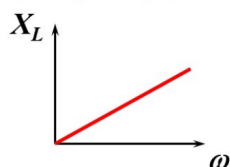
称为“感抗” (inductive reactance)

$$\omega L \times \frac{u}{i}$$

$$\omega L \times \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

感抗的物理意义:

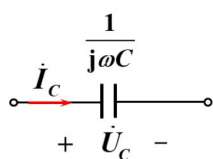
- (1) 反映了电感对电流具有阻碍的能力;
- (2) 感抗与电路工作(角)频率成正比(理想元件如此, 实际情况复杂)。



$\omega = 0$ (直流), $X_L = 0$ (短路)

$\omega \rightarrow \infty$, $X_L \rightarrow \infty$ (开路)

(3) 电容元件



相量模型
(关联参考方向)

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C$$

电容元件
欧姆定律的相量形式

$$Z_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

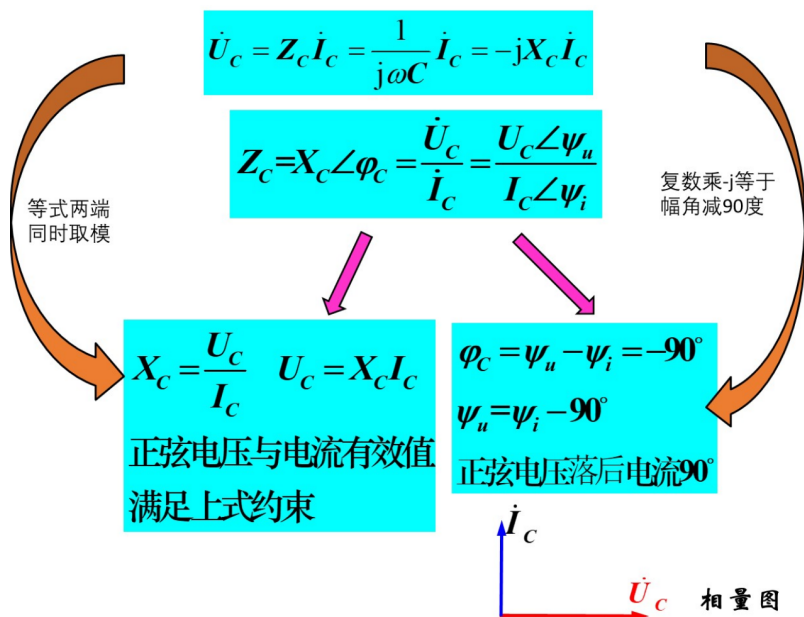
电容元件的复阻抗
(实部为零)。

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C} = X_C$$

电容元件阻抗模,
称容抗

$$\phi_C = -90^\circ$$

电容元件复阻抗
的阻抗角

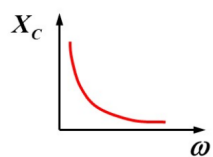


定义: $X_C = U/I = 1/\omega C = 1/2\pi fC$, 单位: 欧姆

称为“容抗”

容抗的物理意义:

- (1) 表征电容对电流的阻碍作用;
- (2) 容抗与电路工作(角)频率成反比;



$\omega = 0$ (直流), $|X_C| \rightarrow \infty$ (隔直作用)

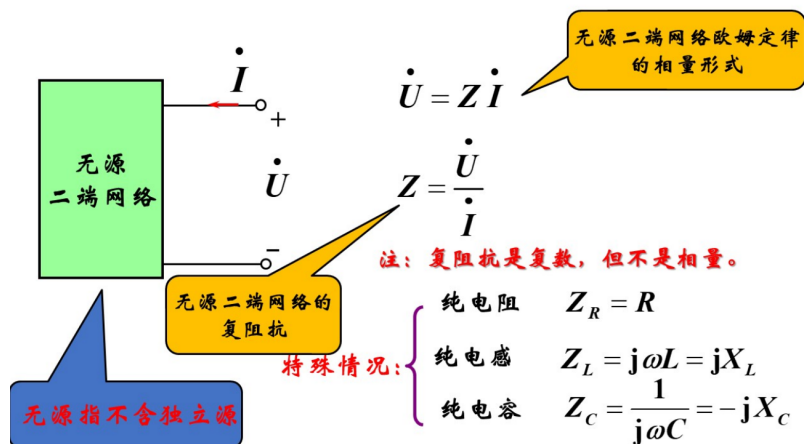
$\omega \rightarrow \infty$, $X_C \rightarrow 0$ (短路作用)

错误的写法

$$\frac{1}{\omega C} \times \frac{u}{i}$$

$$\frac{1}{\omega C} \times \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

知识点3.2: 无源二端网络欧姆定律的相量形式



复阻抗

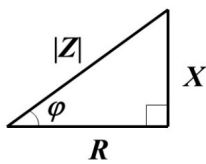
电阻

电抗

$$Z = R + jX = |Z| \angle \varphi$$

阻抗模

阻抗角



阻抗三角形

由复数知识可得

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctan \frac{X}{R} \end{cases}$$

由欧姆定律的相量形式可得

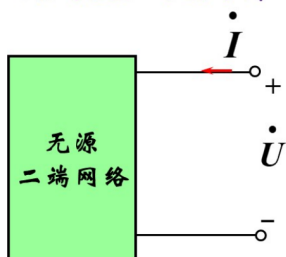
$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \psi_u}{I \angle \psi_i} = \frac{U}{I} \angle (\psi_u - \psi_i) = |Z| \angle \varphi$$

$$\begin{cases} |Z| = \frac{U}{I} \\ \varphi = \psi_u - \psi_i \end{cases}$$

结论：阻抗模等于电压相量和电流相量模之比(正弦电压和电流有效值之比)。

阻抗角等于电压相量与电流相量辐角之差(正弦电压和电流的相位差)。

利用复阻抗判断无源网络性质。



当无源二端网络端口电压超前于电流时，称该无源二端网络呈感性；当电压落后于电流时，称该无源二端网络呈容性；当电压与电流同相时，称该无源二端网络呈电阻性。

该无源二端网络可等效为复阻抗 Z ，其 $\varphi = \psi_u - \psi_i$ ，通过判断 φ 符号，确定网络性质。



(1) 求出网络等效 $Z = R + jX$

(2) 当 $R > 0, X > 0, \varphi > 0$ (因为 $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$)；电压超前于电流，网络呈感性。

(3) 当 $R > 0, X < 0, \varphi < 0$ (因为 $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$)；电压落后于电流，网络呈容性。

(4) 当 $R > 0, X = 0, \varphi = 0$ (因为 $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$)；电压与电流同相，网络呈电阻性。

● 知识点4：正弦电路的相量分析法

由于基尔霍夫定律的相量形式和欧姆定律的相量形式与直流电路的基尔霍夫定律和欧姆定律在形式上是一致的，因而在分析正弦电路时，应用相量列写方程，其形式上与直流电路列写方程是一致的，只不过电压和电流用相量表示，元件用复阻抗表示。

① 画相量电路模型 $R, L, C \rightarrow$ 复阻抗

$$u, i \rightarrow \dot{U}, \dot{I}$$

② 根据直流电阻电路所学定理及分析方法列写

代数方程，方程形式上是一致的，只不过要注意

①中提到的替换关系(相量解析法)。也可画出电压相量和电流相量的相量图，利用几何方法求解(相量图法)。

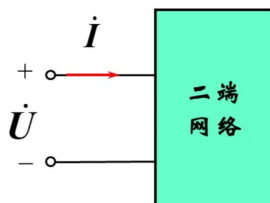
● 知识点5：正弦电路的功率

知识点5.1 正弦电路的三种功率

(1) 有功功率(平均功率)

关联参考方向, 网络吸收有功功率:

$$P = UI \cos \varphi$$



平均功率 P 的单位是**W** (瓦)

其中, U 为正弦电压有效值, I 为正弦电流有效值; $\cos \varphi$ 称为功率因数; $\varphi = \psi_u - \psi_i$, 称作功率因数角。对于无源网络, φ 等于其等效复阻抗的阻抗角。

(2) 无功功率

$$Q = UI \sin \varphi$$

单位: **var** (乏)

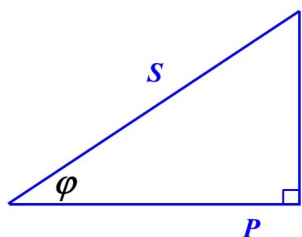
(3) 视在功率

$$S = UI$$

单位: **VA** (伏安)

功率三角形: 反映三种功率及功率因数角的数值计算的关系。

$$P = S \cos \varphi \quad Q = S \sin \varphi \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \varphi = \arccos \frac{P}{S}$$



三种功率区别:

①标识及计算公式不同 (P , Q , S)

②单位不同 (W , var , VA)

③物理含义不同

正弦电路三种功率的物理含义:

(1) 有功功率(平均功率): 在正弦(交流)电路中, 凡是电路实际消耗、不可逆转换的那部分功率(如转变为热能、光能或机械能)称为有功功率。它反映电路在单位时间消耗的电能(转化为其它形式能量)的数值。有功功率是交流电在一个周期内瞬时功率的平均值, 故又称平均功率。

(2) 无功功率: 交流电路中, 电抗性元件(指纯电感或纯电容)在通电后便会建立起电感线圈的磁场或电容器极板间的电场。因此, 在交流电每个周期内的上半部分(瞬时功率为正值)时间内, 它们将会从电源吸收能量用建立磁场或电场; 而下半部分(瞬时功率为负值)的时间内, 其建立的磁场或电场能量又返回电源。因此, 在整个周期内这种功率的平均值等于零。就是说, 电源的能量与磁场能量或电场能量在进行着可逆的能量转换, 而并不消耗功率。无功功率是交流电路中由于电抗性元件(指纯电感或纯电容)的存在, 而进行可逆性转换的那部分电功率, 它表达了交流电源能量与磁场或电场能量交换的最大速率。无功功率决不是无用功率, 它的用处很大。电动机需要建立和维持旋转磁场, 使转子转动, 从而带动机械运动, 旋转磁场就是从电源取得无功功率建立的。变压器也同样需要无功功率, 才能使变压器的一次线圈产生磁场, 在二次线圈感应出电压。因此, 没有无功功率, 电动机就不会转动, 变压器也不能变压。

(3) 正弦(交流)电源所能提供的最大功率, 称之为视在功率或表现功率, 在数值上等于正弦电路中电压与电流有效值的乘积。它通常用来表示交流电源设备(如变压器)的容量大小。能否使视在功率100KVA的变压器输出100KW的有功功率, 主要取决于负载的功率因数。

知识点5.2 复(数)功率

正弦电路电压和电流可以用相量(复数)计算,正弦电路的三种功率可否借助复数计算?联想三种功率数量关系(功率三角形),可以构建一个复数,将三种功率和功率因数统一到一个复数表达式。

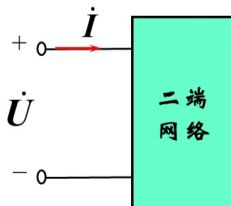
定义 $\bar{S} = P + jQ$ 为复功率。

\bar{S} 实部为 P , 虚部为 Q , 模为 S , 幅角为 φ 。

注: \bar{S} 为复数, 但不是相量, \bar{S} 为用相量法分析正弦电路时的一个辅助计算量。

$$\bar{S} = S \angle \varphi = UI \angle (\psi_u - \psi_i) = U \angle \psi_u I \angle -\psi_i = \dot{U} \dot{I}^*$$

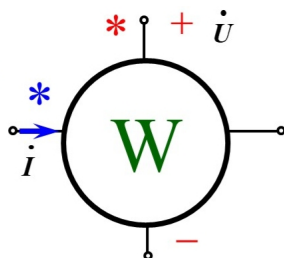
$$\bar{S} = \dot{U} \dot{I}^*$$



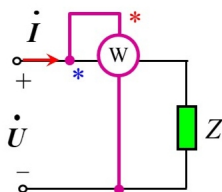
有功功率的测量

1) 功率表接线: 如果接线方式是使得电流从“*”端流入; 电压线圈的“*”端接负载电压的正端 → 则功率表的示值反映的即为 $UI \cos(\psi_u - \psi_i)$

功率表

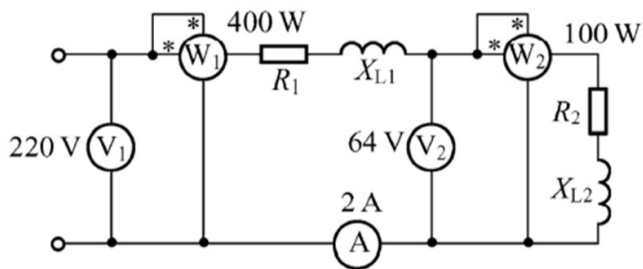


对于图示接法来说, 该示值即为 负载吸收的有功功率



2) 功率表量程: 测量有功功率时, P 、 U 、 I 均不能超量程。

有用结论: 仅含RLC的无源二端网络, 其吸收的有功功率(平均功率)等于网络中电阻元件吸收的有功功率之和。



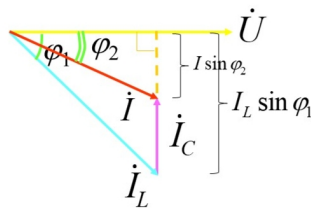
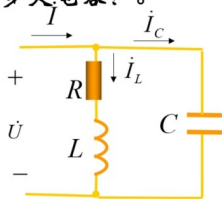
题 4-22 图

$$P_{R2} = 100 \text{ W}$$

$$P_{R1} + P_{R2} = 400 \text{ W}$$

知识点5.3 功率因数提高

问题模型：在保证电路有功功率及供电电压不变的前提下（不影响负载工作状态），将电路的功率因数由 $\cos\varphi_1$ 提升到 $\cos\varphi_2$ ，需并联多大电容？



$$I_C = I_L \sin \varphi_1 - I \sin \varphi_2$$

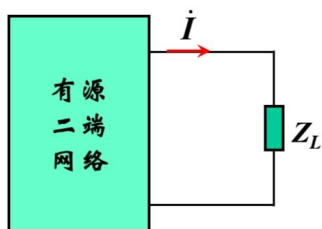
$$I_L = \frac{P}{U \cos \varphi_1}, I = \frac{P}{U \cos \varphi_2} \text{ 代入上式 } I_C = \frac{P}{U} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I_C} \quad \rightarrow \quad C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$

知识点5.4 最大功率传输

正弦稳态电路中负载获得最大有功功率 P_{\max} 的条件

$$Z_0 = R_0 + jX_0, \quad Z_L = R_L + jX_L$$



(1) 最佳匹配（共轭匹配）

$$Z_L = Z_0^*, \quad \text{即} \quad \begin{cases} R_L = R_0 \\ X_L = -X_0 \end{cases}$$

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0}$$

(2) 模匹配

当负载阻抗 $Z_L = |Z_L| e^{j\varphi_L}$ 的模 $|Z_L|$ 可以改变，而阻抗角 φ_L 不能改变时，负载获得最大功率的条件是：

负载阻抗模与网络除源等效阻抗阻抗模相等，即

$$|Z_L| = |Z_0|$$

获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{oc}^2 \cos \varphi_L}{2|Z_0|[1 + \cos(\varphi_0 - \varphi_L)]}$$

例如

纯电阻负载获得最大功率的条件是 $R_L = |Z_0|$

如果网络等效复阻抗也是纯电阻 $Z_0 = R_0$

电阻负载获得最大功率的条件则是 $R_L = R_0$